PRVNÍ POJEDNÁNÍ O FLOPPY LOGICE

PAVEL PROVINSKÝ

Praha, 2021

Obsah

Úvod

Tento text vznikal jako teze k mé dizertační práci „Fuzzy sets in stochastic modelling“ [19]. V současné době (říjen 2021) se jedná o nejúplnější pojednání o floppy logice v češtině.

Hlavním cílem mé práce bylo matematicky korektně propojit fuzzy množiny s teorií pravděpodobnosti.

Dosažení tohoto cíle je velmi žádoucí. Při práci se systémy totiž často narážíme na popis a řízení pomocí fuzzy množin a současně na zpracování dat pomocí pravděpodobnostních a statistických nástrojů. Tyto dva přístupy však dosud nebyly plně kompatibilní.

Novou teorii, která naplňuje cíl stanovený výše, jsem nazval *floppy logikou*. Jedná se o mnohahodnotovou logiku podobnou fuzzy logikám.

Mezi nejzajímavější výsledky této teorie patří fakt, že floppy logika zachovává všechny vlastnosti standardní dvouhodnotové logiky, které lze vyjádřit jako ekvivalenci. Floppy logika tudíž zachovává distributivitu, zákon kontradikce, zákon o vyloučení třetího, De Morganovy zákony, obměnu implikace atd. Fakt, že taková mnohahodnotová logika vůbec existuje, je nesmírně překvapující.

Další krásnou vlastností floppy logiky je, že je modelem Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti. Můžeme tedy v rámci floppy logiky používat veškeré standardní prostředky teorie pravděpodobnosti. Lze tedy např. definovat střední hodnotu floppy množiny, můžeme používat Bayesovu větu nebo větu o úplné pravděpodobnosti.

Přitom všem si floppy logika uchovává jednoduchost a praktičnost fuzzy logiky. To jistě ocení každý, kdo se pokusí použít floppy logiku k řešení nějakého konkrétního problému.

Text je rozdělen do pěti kapitol.

První kapitola se jmenuje „Floppy logika v historickém kontextu“.

Uvádíme zde některé myšlenky, které se ve dvacátém století objevily ať už v logice nebo v teorii pravděpodobnosti a které s floppy logikou souvisí. Snažíme se také ukázat, zda tyto myšlenky ke vzniku floppy logiky směřovaly, nebo naopak její vznik oddálily.

Druhá kapitola „Matematické základy floppy logiky“ je matematickým jádrem této práce. Zavádí základní pojmy a vztahy floppy logiky. Nejdůležitějšími výsledky této kapitoly jsou tři matematické věty. První dvě spojují floppy logiku s teorií pravděpodobnosti, třetí pak s Boolovou dvouhodnotovou logikou.

Třetí kapitola „Další zajímavé matematické výsledky“ pojednává tři témata. Nejprve, jako ukázku vztahu mezi floppy logikou a teorií pravděpodobnosti, zavádí střední hodnotu floppy množiny.

Následuje pozoruhodný výčet vlastností floppy implikace včetně řady zobecnění logických odvozovacích pravidel modus ponens a modus tollens.

Nakonec zde najdeme srovnání floppy funkce příslušnosti s t-normami a t-konormami používanými ve fuzzy logice. Z tohoto srovnání pak odvozujeme způsob, jak kvantitativně měřit závislost dvou výroků.

Čtvrtá kapitola „Popis systému pomocí floppy logiky“ detailně probírá vše, co je potřeba k popisu a řízení systému pomocí floppy logiky. Začíná výběrem vhodných fuzzy množin, pokračuje fuzzifikací vstupních dat, implementací systémových pravidel, defuzzifikací výstupních veličin a končí optimálním řízením systému.

Pátá kapitola se jmenuje „Porovnání s některými dalšími teoriemi“. Porovnává floppy logiku s fuzzy logikami a s pravděpodobnostními logikami Adamsovou a Stalnakerovou.

Toto pojednání chce čtenáře seznámit s hlavními výsledky floppy logiky. Vychází přitom z článků [16, 17, 18]. Text však byl výrazně přepracován a rozšířen.

Doufám, že četba následujících stran bude nejen poučným, ale i příjemným zážitkem!

Kapitola 1

Floppy logika v historickém kontextu

1.1 Počátky vícehodnotové logiky

Je tomu již více než sto let od doby, kdy v roce 1920 vyšel krátký, dvoustránkový článeček Jana Łukasiewicze o trojhodnotové logice [12]. Tento nenápadný počin zahájil éru vícehodnotových logik a dal i celému odvětví základní směřování.

Když procházíme Łukasiwiczowu přednášku z roku 1939 [11, str. 215-223], kde autor na vznik trojhodnotové logiky vzpomíná, najdeme zde řadu pozoruhodných výpovědí. V první řadě vidíme velikou důležitost, kterou autor vzniku nových logik přikládá: „Každá taková logika může být základem trochu jiné matematiky a každá taková matematika může být základem trochu jiné fyziky."

Trojhodnotová logika vznikla, jak Łukasiwicz vypráví, díky šťastnému spojení dvou myšlenek. Šlo jednak o moderní myšlenku Charlese Sanderse Peirce, který logické operátory definoval pomocí pravdivostních tabulek, jednak o klasickou úvahu Aristotelovu, který v deváté kapitole Hermeneutiky uvažuje o budoucích událostech, které možná nastanou, možná nikoli. Łukasiwicz toto „možná" uchopil jako třetí logickou hodnotu a vytvořil příslušné pravdivostní tabulky.

Každá logika postavená na pravdivostních tabulkách je, řečeno dnešním jazykem, funkcionální. Což ostatně Łukasiewicz výslovně říká: „Ve výrokovém kalkulu přijímáme pouze tak zvané pravdivostní logické funkce, to znamená takové funkce, jejichž logická hodnota závisí pouze na logických hodnotách argumentů” [11].

Toto omezení se na funkcionální logiky se přeneslo do hlavního myšlenkového proudu celé vícehodnotové logiky na příštích sto let. Jen výjimečně najdeme práce o nefunkcionálních logikách. (Např. [7, 8].) Funkcionální logiky ovšem nebylo možné propojit s teorií pravděpodobnosti, která je nefunkcionální. Slovy Łukasiewiczowými: „Dosavadní pokusy o propojení systémů vícehodnotové logiky s počtem pravděpodobnosti narazily na velké problémy“ [11].

V tomto kontextu je zajímavá floppy logika, která je modelem Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti a funkcionální není.

Vraťme se však k Janu Łukasiewiczovi. Ten si kladl otázku, zda je možné ve vícehodnotových logikách zachovat všechny logické zákony logiky dvouhodnotové: „Co by se stalo, kdybychom k hodnotám 1 a 0 připojili třetí logickou hodnotu, např. 2, a doplnili pravdivostní tabulku o rovnosti obsahující dvojku? Zachovaly by se i tehdy všechny logické zákony? Už zběžné prozkoumání této myšlenky vede k závěru, že ne všechny zákony dvouhodnotové logiky by mohly zůstat v platnosti“ [11].

Jaké by bylo překvapení Jana Łukasiewicze, kdyby se dozvěděl, že sto let po jeho objevu vícehodnotové logiky se objeví logika, která zachovává všechny zákony dvouhodnotové logiky, které lze vyjádřit jako ekvivalenci. Myslím, že by byl nadšen! Tato vlastnost je na celé floppy logice asi ta nejpřekvapivější.

1.2 Pravděpodobnostní logika

Posuňme se však dál v čase i ději a věnujme se logikám, které jako možný obor logických hodnot uznávají celý interval $\langle 0, 1 \rangle$. Na scéně se objevuje pravděpodobnostní logika. Nejedná se o nějakou jednotnou teorii, spíše o myšlenkový proud, kterému je společné přesvědčení, že roli zobecněné pravdivostní hodnoty může zastávat pravděpodobnost. Myšlenku o spřízněnosti logiky a pravděpodobnosti můžeme ostatně nalézt například už v názvu stěžejního díla George Boolea „Vyšetřování zákonů myšlení, na nichž jsou založeny matematické teorie logiky a pravděpodobnosti“ [4].

Věnujme se však jedné konkrétní myšlence pravděpodobnostní logiky, totiž tzv. Adamsově tezi. Ta říká, že pravděpodobnost implikace $P\left(A \Rightarrow B\right)$

je rovna podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A)$. Tato teze je známá zejména z prací Ernesta Wilcoxe Adamse [2, 1] a Roberta Stalnakera [22]. Nalézt ji však můžeme i v mnohem starší práci Franka Plumptona Ramseye z roku 1931 [20]. Adamsova teze je konkrétním vztahem, který propojuje logiku s pravděpodobností. Na jeho základě je možné vybudovat celou vícehodnotovou logiku.

Jak však ukázal David Lewis [10], tato logika má paradoxní chování, pokud argumentem nějaké implikace je nějaká další implikace.

Jak si zanedlouho ukážeme, i v rámci floppy logiky je možné odvodit vztah mezi pravděpodobností implikace $P(A \Rightarrow B)$ a podmíněnou pravděpodobností $P(B|A)$. Tento vztah je však o něco složitější než Adamsova teze a Lewisovy závěry se na něj nevztahují.

1.3 Fuzzy logika

Dalším mocným myšlenkovým proudem v rámci vícehodnotové logiky je fuzzy logika. Její hlavní ideou je myšlenka, že prvky mohou do množiny patřit i částečně a že stupeň členství v množině můžeme popsat číslem z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Jednička - prvek patří do množiny úplně, nula - prvek do množiny vůbec nepatří, čtvrtina - prvek patří do množiny jen na 25 %.

První článek o fuzzy logice napsal Lotfi Zadeh v roce 1965 [25].

Již v tomto prvním textu Zadeh navrhuje dva způsoby, jak je možné pro potřeby fuzzy množin zobecnit množinové operace. Brzy se objevují způsoby další a vzniká tak celá řada dílčích fuzzy logik. Jejich množství je určitým problémem, pokud chceme pomocí fuzzy logiky řešit nějaký konkrétní úkol. Není totiž zřejmé, kterou konkrétní fuzzy logiku si vybrat.

Na fuzzy logikách lze hezky demonstrovat zachovávání a nezachovávání jednotlivých zákonů dvouhodnotové logiky. Tabulka 1.1 ukazuje tři nejpoužívanější fuzzy logiky a několik nejznámějších logických zákonů. Připomínáme, že floppy logika zachovává tyto zákony všechny.

Fuzzy logika má již k floppy logice velice blízko. Floppy logika přejímá ideu fuzzy množin jako jednu ze stěžejních myšlenek.

Asi nejpodstatnější rozdíl mezi oběma teoriemi je v tom, že floppy logika aplikuje princip, který použil už Andrej Nikolajevič Kolmogorov v roce 1933 při axiomatizaci teorie pravděpodobnosti [9]. Ten totiž již nepřipisoval pravděpodobnost jednotlivým možným výsledkům náhodného pokusu, ale

Tabulka 1.1: Logické zákony v nejčastěji používaných fuzzy logikách. G = Gödelova logika, Ł = Łukasiewiczova logika, S = součinová logika, vše se standardní negací. Data jsou převzata z [14].

	G	Ł	S
involuce			
$\neg(\neg A) = A$	OK	OK	OK
komutativita			
$A \vee B = B \vee A$	OK	OK	OK
$A \wedge B = B \wedge A$			
asociativita			
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	OK	OK	OK
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$			
distributivita			
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	OK	$\times$	$\times$
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$			
idempotence			
$A \vee A = A$	OK	$\times$	$\times$
$A \wedge A = A$			
absorpce			
$A \vee (A \wedge B) = A$	OK	$\times$	$\times$
$A \wedge (A \vee B) = A$			
zákon kontradikce			
$A \wedge \neg A = 0$	$\times$	OK	$\times$
zákon o vyloučení třetího			
$A \vee \neg A = 1$	$\times$	OK	$\times$
De Morganovy zákony			
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	OK	OK	OK
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$			

jejich množinám. Obdobně, ve floppy logice nepřipisujeme pravděpodobnost přímo fuzzy množinám, ale množinám fuzzy množin.

Ani fuzzy logiku, jakožto funkcionální, nebylo možné propojit s teorií pravděpodobnosti. I když pokusů a kombinací obou přístupů se objevila celá řada. Např. Lotfi Zadeh zavádí pravděpodobnost fuzzy množiny [27] nebo dokonce pravděpodobnost popsanou fuzzy číslem [24].

Jmenujme také teorii možnosti zavedenou Lotfi Zadehem [26], Didierem Duboisem a Henrim M. Pradem [5]. Zde autoři nahrazují pravděpodobnost dvojicí hodnot – možností a nutností. Teorie má některé rysy společné s fuzzy logikou a jiné s teorií pravděpodobnosti.

Rád bych také uvedl práci [13], která zkoumá otázku, které t-normy a t-konormy ve spojení se Zadehovou definicí pravděpodobnosti splňují axiomy Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti. Velmi podobná otázka stála u vzniku floppy logiky.

1.4 Floppy logika

V září 2013 položil Ivan Nagy, můj kolega, velmi zajímavou otázku, zda by bylo možné nějak konzistentně propojit statistiku s fuzzy množinami. Vždyť oba přístupy se velmi úspěšně uplatňují při práci se složitými systémy.

A okamžitě navrhl řešení: Kdyby se ve světě fuzzy množin našla struktura, která by splňovala všechny axiomy teorie pravděpodobnosti, a byla tudíž modelem teorie pravděpodobnosti, mohli bychom při práci s fuzzy množinami využívat celé bohatství pojmů a nástrojů teorie pravděpodobnosti.

Tato myšlenka mne velmi zaujala a během dvou týdnů byly na světě první výsledky.

První článek, který zaváděl základy floppy logiky, byl publikován v roce 2017 [16]. Druhý článek [17] přinášel mnoho příkladů práce s floppy logikou. Ve třetím článku [18] bylo dokázáno, že výroky, které jsou logicky ekvivalentní ve dvouhodnotové Boolově logice, jsou také ekvivalentní ve floppy logice. Lze tedy na floppy logiku nahlížet jako na přirozené zobecnění logiky dvouhodnotové.

Nakonec si položme otázku, jak je možné, že tak přirozená a přímočará teorie, jako je floppy logika, se objevila až téměř sto let po prvních Łukasiewiczových pracích. Je to podivuhodné!

Domnívám se, že v prvé řadě jen málokterý logik by si myslel, že vícehodnotová logika, která zachovává všechny podstatné vlastnosti logiky dvouhodnotové, (které lze vyjádřit jako ekvivalenci) je vůbec možná.

Dalším důvodem snad je přílišné zaměření komunity logiků na logiky funkcionální.

Cesta k floppy logice mohla vést i skrze pravděpodobnostní logiku. Zde snad byla překážkou svůdná jednoduchost Adamsovy teze.

Asi nejblíže k floppy logice byl Lotfi Zadeh, když v roce 1968 zaváděl pravděpodobnost fuzzy množin [27]. V tomto článku cituje učebnici pravděpodobnosti Howarda Tuckera [23]. Kolmogorovu myšlenku připisování pravděpodobnosti nikoliv jednotlivým možným výsledkům náhodného pokusu, ale jejich množinám, lze (i když zde není zdůrazněna) vyčíst z prvních stránek této učebnice. Pokud by Lotfi Zadeh tenkrát tuto myšlenku aplikoval a definoval nikoli pravděpodobnost fuzzy množiny, ale pravděpodobnost množiny fuzzy množin, byl by vznik floppy logiky jen přímočarým a přirozeným završením tohoto kroku.

Kapitola 2

Matematické základy floppy logiky

V této kapitole si zavedeme základní pojmy a vztahy floppy logiky.

2.1 Předpoklady a definice

Buďte A_1, A_2, $\ldots$ fuzzy množiny, jejichž funkce příslušnosti jsou definovány na stejném definičním oboru. Tyto množiny budeme nazývat *primární fuzzy množiny.*

Buďte $\mu_{A_1}(x)$, $\mu_{A_2}(x)$, $\ldots$ funkce příslušnosti primárních fuzzy množin A_1, A_2, $\ldots$

Buď X definiční obor funkcí příslušnosti $\mu_{A_1}(x)$, $\mu_{A_2}(x)$, $\ldots$

Buď $\boldsymbol{S}$ množina všech primárních fuzzy množin A_1, A_2, $\ldots$

Buď $\mathcal{P}(\boldsymbol{S})$ množina všech podmnožin množiny $\boldsymbol{S}$.

Buď $\boldsymbol{S_x}$ množina všech primárních fuzzy množin A_i jejichž funkce příslušnosti jsou pro dané x větší než nula.

Nechť jsou splněny následující předpoklady:

Předpoklad 2.1. Pro všechna $x \in X$ je $\boldsymbol{S_x}$ konečná nebo spočetná množina.

Předpoklad 2.2. Funkce příslušnosti primárních fuzzy množin $A_i \in \boldsymbol{S}$ nabývají hodnot z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Předpoklad 2.3.

$$\boxed{\forall x \in X : \sum_{A_i \in \boldsymbol{S}} \mu_{A_i}(x) = 1.} \tag{2.1}$$

Předpoklad 2.4. Na množině X je definován pravděpodobnostní prostor $(X, \mathcal{A}, P)$, kde $\mathcal{A}$ je nějaká σ-algebra na X a P je nějaká pravděpodobnostní míra.

Předpoklad 2.5. Všechny funkce příslušnosti $\mu_{A_i}(x)$ primárních fuzzy množin $A_i \in \boldsymbol{S}$ jsou měřitelné na množinách $X_i \in \mathcal{A}$ dle míry P.

Definice 2.1. Všechny podmnožiny $\boldsymbol{S}$ budeme nazývat *floppy množinami.* Floppy množiny budeme značit tučnými velkými písmeny.

Definice 2.2. Ke každé floppy množině $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{S}$ je přiřazena funkce $\boldsymbol{\mu_B}(x)$. Tato funkce $\boldsymbol{\mu_B}(x)$ je definována předpisem:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_B}(x) = \sum_{A_i \in \boldsymbol{B}} \mu_{A_i}(x) \, .} \tag{2.2}$$

Funkci $\boldsymbol{\mu_B}(x)$ budeme nazývat *floppy funkcí příslušnosti floppy množiny* a budeme ji značit tučným řeckým písmenem $\boldsymbol{\mu}$.

Definice 2.3. Ke každé floppy množině $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{S}$ je přiřazeno číslo $R(\boldsymbol{B})$. Toto číslo $R(\boldsymbol{B})$ je definováno předpisem:

$$\boxed{R(\boldsymbol{B}) = \int_X \boldsymbol{\mu_B}(x) \, \mathrm{d}P,} \tag{2.3}$$

kde integrál je Lebesgueův integrál a P je pravděpodobnostní míra předpokládaná v předpokladu 2.4. Číslo $R(\boldsymbol{B})$ budeme nazývat *pravděpodobnost floppy množiny* a budeme je značit velkým písmenem R.

Následující věta ukáže, že číslo vybrané takovýmto způsobem má opravdu vlastnosti pravděpodobnosti.

2.2 Věta o základním floppy pravděpodobnostním prostoru

Definice 2.4. Prostor $(\boldsymbol{S}, \mathcal{P}(\boldsymbol{S}), R)$ budeme nazývat *základní floppy pravděpodobnostní prostor*.

Platí následující věta:

Věta 2.1. Každý základní floppy pravděpodobnostní prostor splňuje všechny axiomy Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti.

Důkaz této věty lze nalézt v [16].

Poznámka 2.1. Důkazem věty 2.1 byl dosažen cíl stanovený Ivanem Nagym. Ve světě fuzzy množin byla nalezena struktura, která splňuje všechny axiomy Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti. Můžeme tedy ve floppy logice používat všechny standardní pojmy a nástroje teorie pravděpodobnosti. Můžeme například používat Bayesovu větu, větu o úplné pravděpodobnosti nebo můžeme konzistentně definovat střední hodnotu floppy množiny.

Poznámka 2.2. Výsledek věty 2.1 by mohl někomu připadat triviální. Jeden pravděpodobnostní prostor totiž předpokládáme v předpokladu 2.4, existenci druhého dokazujeme ve větě 2.1. O triviální výsledek však nejde, neboť se jedná o dva naprosto různé pravděpodobnostní prostory. Proto také obě příslušné pravděpodobnostní míry značíme různými písmeny P a R.

Poznámka 2.3. Floppy množina je ostrá množina primárních fuzzy množin. Její floppy funkce příslušnosti je součtem funkcí příslušnosti jejích prvků.

Poznámka 2.4. Průnik dvou různých jednoprvkových floppy množin je roven prázdné množině. Toto musíme mít na mysli, když modelujeme nějakou skutečnou veličinu pomocí primárních fuzzy množin.

Můžeme tedy například teplotu vody popsat pomocí následujících tří primárních fuzzy množin: nepříjemně studená, příjemná, nepříjemně teplá. Nikdo totiž asi neprohlásí, že by voda byla nepříjemně studená a příjemná současně. To odpovídá tomu, že průnik jednoprvkových množin je prázdná množina.

Na druhou stranu, nemůžeme použít primární fuzzy množiny: studená, příjemná, teplá. Voda totiž může být např. příjemná i teplá současně.

Tento problém můžeme obejít tím, že primárních fuzzy množin zvolíme více. V našem případě těchto pět: nepříjemně studená; příjemně studená; příjemná a přitom ani studená, ani teplá; příjemně teplá; nepříjemně teplá.

Poznámka 2.5. Floppy logika není funkcionální. To znamená, že $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(x)$ nemůže být spočteno pouze ze znalosti $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}}(x)$ a $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}}(x)$. Musíme znát ještě prvky floppy množin $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Podobně, ani v teorii pravděpodobnosti nemůžeme pravděpodobnost jevu $A \cap B$ spočítat jen z pravděpodobnosti jevů A a B. Musíme znát ještě podmíněnou pravděpodobnost.

Na druhou stranu, např. standardní dvouhodnotová logika funkcionální je.

Poznámka 2.6. Jak lze nalézt v [16], floppy logiku lze výrazným způsobem zobecnit. Také tato zobecněná floppy logika je modelem Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti a splňuje všechny příslušné axiomy.

Nejdůležitějším výsledkem této zobecněné floppy logiky je, že floppy funkci příslušnosti floppy množiny můžeme chápat jako podmíněnou pravděpodobnost:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}}(x) = R(\boldsymbol{A}|x).} \tag{2.4}$$

Tuto podmíněnou pravděpodobnost můžeme často interpretovat jako pravděpodobnost, že někdo (např. nějaký expert) prohlásí, že pokud je přesná hodnota veličiny x, tak má vlastnost $\boldsymbol{A}$.

Odtud nám plyne návod, jak určovat floppy funkce příslušnosti jednotlivých floppy množin (nebo funkce příslušnosti primárních fuzzy množin).

Příklad 2.1. 60 % expertů tvrdí, že voda, která má teplotu 50 °C, je horká. Floppy funkce příslušnosti floppy množiny „horká“ je tudíž pro teplotu 50 °C rovna 0,6.

2.3 Věta o izomorfizmu

Věta o izomorfizmu říká, že existuje izomorfizmus mezi výroky a množinami. V tomto izomorfizmu si odpovídají množinová operace ∩ a logická operace

$\wedge$, množinová operace $\cup$ a logická operace $\vee$. Dále si odpovídají množinová operace doplňku a logická operace negace.

Tato věta není nová, používáme ji např. vždy, když výroky znázorňujeme Vennovými diagramy. Přesto je pro floppy logiku zcela zásadní. Pro její stěžejní význam jsme ji pro floppy množiny znovu podrobně vyslovili a dokázali v [18].

Z této věty plyne několik důležitých důsledků pro floppy logiku:

Důsledek 2.1. Věta o izomorfizmu říká, že ke dvěma výrokům, které jsou logicky ekvivalentní ve standardní dvouhodnotové logice, přísluší dvě floppy množiny, které jsou si rovny. Mají tudíž stejné prvky, stejnou floppy funkci příslušnosti a tudíž i pravděpodobnost.

V tomto smyslu můžeme říci, že výroky, které jsou logicky ekvivalentní ve standardní dvouhodnotové logice, jsou ekvivalentní i ve floppy logice.

Důsledek 2.2. To znamená, že floppy logika zachovává všechny vlastnosti standardní dvouhodnotové logiky, které lze vyjádřit jako ekvivalenci. Speciálně tedy zachovává např. obměnu implikace nebo všechny logické zákony uvedené v tabulce 1.1.

Důsledek 2.3. Floppy logiku je tudíž možno považovat za zobecnění dvouhodnotové Boolovy logiky.

Důsledek 2.4. Věta o izomorfizmu říká, že příslušné Boolovy algebry floppy množin a výroků jsou izomorfní. Můžeme tedy ve vyjadřování přecházet mezi floppy množinami a jim příslušnými výroky, stejně tak i mezi operacemi množinovými a logickými.

Můžeme tedy mluvit např. o pravděpodobnosti implikace.

Důsledek 2.5. Pravděpodobnost implikace můžeme vyjádřit takto:

$$R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = R(\neg\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})) = R(\boldsymbol{A}' \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})) . \tag{2.5}$$

$\boldsymbol{A}'$ a $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ jsou vzájemně neslučitelné jevy, tudíž:

$$R(\boldsymbol{A}' \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})) = R(\boldsymbol{A}') + R(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) . \tag{2.6}$$

Věta o základním floppy pravděpodobnostním prostoru nám říká, že R má všechny vlastnosti pravděpodobnosti. Můžeme tedy použít standardní vztahy pro pravděpodobnosti $R(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ a $R(\boldsymbol{A}')$. Získáme tak vztah mezi pravděpodobností implikace a podmíněnou pravděpodobností:

$$\boxed{R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = 1 - R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \cdot R(\boldsymbol{A}).} \tag{2.7}$$

Kromě jiného vidíme, že Adamsova teze ve floppy logice neplatí.

Důsledek 2.6. Podobně můžeme vyjádřit např. tranzitivitu implikace:

$$R\Big[\big[(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C})\big] \Rightarrow \big[\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}\big]\Big] = 1. \tag{2.8}$$

Na tomto příkladu vidíme, že floppy logika Lewisovým výsledkem omezena není.

Důsledek 2.7. Ve floppy logice pracujeme jak s pravděpodobnostmi, které známe z pravděpodobnostní logiky, tak i s funkcemi příslušnosti, které známe z fuzzy logiky. Je vskutku podivuhodné, že obě tato možná zobecnění pravdivostní hodnoty mají ve floppy logice své místo.

Důsledek 2.8. Nyní připusťme předpoklad, který může být z filozofického hlediska poněkud problematický. Předpokládejme tedy, že

$$\forall x \in Y : \boldsymbol{\mu_A}(x) = 1 \qquad \text{je to samé jako} \qquad \forall x \in Y : A(x), \tag{2.9}$$

$$\exists x \in Y : \boldsymbol{\mu_A}(x) = 1 \qquad \text{je to samé jako} \qquad \exists x \in Y : A(x). \tag{2.10}$$

Pak můžeme floppy logiku považovat i za zobecnění predikátorové logiky.

Musíme však být opatrní. Zápis pomocí floppy funkcí příslušnosti je obecnější než zápis pomocí kvantifikátorů $\forall$ a $\exists$. Tudíž například základní vztah predikátorové logiky

$$\neg(\forall x \in Y : A(x)) \equiv \exists x \in Y : \neg(A(x)) \tag{2.11}$$

ve floppy logice neplatí.

Kapitola 3

Další zajímavé matematické výsledky

3.1 Střední hodnota floppy množiny

Věta o základním floppy pravděpodobnostním prostoru nám garantuje, že v rámci floppy logiky můžeme používat pojmy a nástroje teorie pravděpodobnosti. Předveďme si to na příkladu střední hodnoty floppy množiny.

Střední hodnotu floppy množiny $\boldsymbol{B}$ definujeme jako střední hodnotu veličiny x za podmínky, že x je z $\boldsymbol{B}$:

Definice 3.1.

$$\boxed{\langle \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{E}\left(x|\boldsymbol{B}\right).} \tag{3.1}$$

Můžeme odvodit vzorec (viz [17]):

$$\langle \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{E}\left(x|\boldsymbol{B}\right) \quad = \quad \frac{\int_X x \cdot \boldsymbol{\mu_B}(x)\,\mathrm{d}P}{\int_X \boldsymbol{\mu_B}(x)\,\mathrm{d}P}, \tag{3.2}$$

kde integrály jsou Lebesgueovy integrály.

Pro takto definovanou střední hodnotu floppy množiny můžeme získat velmi zajímavý výsledek:

Předpokládejme, že $\{\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}, \ldots \boldsymbol{B_n}\}$ je konečná množina vzájemně neslučitelných floppy množin, jejichž sjednocením je celý základní prostor $\boldsymbol{S}$.

Pak můžeme napsat následující vztah:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\langle \boldsymbol{B_i} \rangle\right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{B_i} \rangle \cdot R\left(\boldsymbol{B_i}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R\left(\boldsymbol{B_i}\right)} \cdot \int_X x \cdot R\left(\boldsymbol{B_i}|x\right) \mathrm{d}P \cdot R\left(\boldsymbol{B_i}\right) = \\
&= \int_X x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} R\left(\boldsymbol{B_i}|x\right) \right) \mathrm{d}P = \\
&= \int_X x \cdot 1 \cdot \mathrm{d}P. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Tudíž:

$$\boxed{\mathrm{E}\left(\langle \boldsymbol{B_i} \rangle\right) = \mathrm{E}\left(x\right).} \qquad (3.4)$$

To znamená, že k výpočtu střední hodnoty náhodné veličiny nemusíme znát rozdělení pravděpodobnosti této veličiny. Postačí, pokud budeme znát střední hodnoty jednotlivých floppy množin a jejich pravděpodobnosti.

Příklad 3.1. Výkon fotbalového týmu je popsán náhodnou veličinou. Jak konkrétně měřit výkon týmu, je problém. Předpokládejme zatím pouze, že definiční obor této veličiny jsou reálná čísla. Rozdělení pravděpodobnosti neznáme.

Výkon týmu je ale také popsán třemi floppy množinami „výhra“, „remíza“, „prohra“. Jejich definičním oborem je táž reálná osa. Průběh funkcí příslušnosti také neznáme. Tyto tři floppy množiny jsou vzájemně neslučitelné a pokrývají všechny možnosti.

Předpokládejme ale, že tři, jedna a nula bodů za výhru, remízu a prohru jsou střední hodnoty příslušných floppy množin.

Náš tým vyhrál 18-krát, remizoval 5-krát a prohrál 12-krát.

Střední hodnotu jeho výkonu pak můžeme odhadnout takto:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(x\right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{B_i} \rangle \cdot R\left(\boldsymbol{B_i}\right) = \\
&= 3 \cdot \frac{18}{35} + 1 \cdot \frac{5}{35} + 0 \cdot \frac{12}{35} = 1.69. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Myšlenka, že body přiřazené jednotlivým variantám můžeme chápat jako střední hodnoty příslušných floppy množin, je velmi pozoruhodná.

3.2 Pozoruhodná implikace

Z věty o izomorfizmu plynou dva důležité vzorce pro floppy implikaci. Je to jednak vzorec pro výpočet floppy implikace:

$$\boxed{R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = 1 - R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \cdot R(\boldsymbol{A}),} \tag{3.6}$$

jednak vzorec pro obměnu implikace:

$$\boxed{R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = R(\neg\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}).} \tag{3.7}$$

Z těchto vzorců, společně s Bayesovou větou a větou o úplné pravděpodobnosti, můžeme odvodit celou řadu zajímavých vztahů pro floppy implikaci. Tyto vztahy přitom platí nejen ve floppy logice, ale, pokud se omezíme pouze na pravdivostní hodnoty 0 a 1, tak i ve standardní Boolově logice.

Například Bayesovu větu můžeme pro implikace přepsat takto:

$$R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{R(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) \cdot R(\boldsymbol{B})}{R(\boldsymbol{A})}, \tag{3.8}$$

$$R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \cdot R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) \cdot R(\boldsymbol{B}), \tag{3.9}$$

$$R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) - 1 + R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}) - 1 + R(\boldsymbol{B}), \tag{3.10}$$

$$R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{B}), \tag{3.11}$$

$$R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - R(\boldsymbol{A}). \tag{3.12}$$

Modus ponens je logické pravidlo, které říká: Jestliže platí A a současně platí $A \Rightarrow B$ pak platí i B.

Ve floppy logice můžeme odvodit (viz [18]) například toto zobecnění modus ponens:

$$\boxed{R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) + R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) - 1.} \tag{3.13}$$

Pozoruhodné na něm je, že v něm vůbec nevystupuje pravděpodobnost $\boldsymbol{A}$. Veškerá informace o $\boldsymbol{A}$ je skryta v obou implikacích.

Odvodit můžeme i několik dalších zobecnění modus ponens:

$$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) + R(\boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}), \tag{3.14}$$

$$R(\boldsymbol{B}) = 2 - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}), \tag{3.15}$$

$$R(\boldsymbol{B}) = R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) + R(\neg\boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}). \tag{3.16}$$

Modus tollens je logické pravidlo, které říká: Pokud platí $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ a současně neplatí $\boldsymbol{B}$, pak neplatí ani $\boldsymbol{A}$.

Ve floppy logice můžeme odvodit několik zobecnění modus tollens:

$$
\begin{aligned}
R(\neg\boldsymbol{A}) &= R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) + R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \neg\boldsymbol{B}) - 1, && (3.17)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) + R(\neg\boldsymbol{B}) - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}), && (3.18)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= 2 - R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) - R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}), && (3.19)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}). && (3.20)
\end{aligned}
$$

Místo dvou floppy množin $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ můžeme uvažovat floppy množin více. Nechť například $\{\boldsymbol{A}_i\}$ je konečná množina n vzájemně neslučitelných floppy množin, jejichž sjednocením je celý základní prostor $\boldsymbol{S}$. Pak můžeme napsat tato zobecnění modus ponens:

$$
\begin{aligned}
R(\boldsymbol{B}) &= \sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{A}_i \Rightarrow \boldsymbol{B}) - n + 1, && (3.21)\\
R(\boldsymbol{B}) &= \frac{n - \sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}_i)}{n-1}, && (3.22)\\
R(\boldsymbol{B}) &= n - \sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}_i), && (3.23)\\
R(\boldsymbol{B}) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} R(\neg\boldsymbol{A}_i \Rightarrow \boldsymbol{B}) - 1}{n-1}. && (3.24)
\end{aligned}
$$

Pokud je $\{\boldsymbol{B}_i\}$ konečná množina n vzájemně neslučitelných floppy množin, jejichž sjednocením je celý základní prostor $\boldsymbol{S}$, pak můžeme napsat tato zobecnění modus tollens:

$$
\begin{aligned}
R(\neg\boldsymbol{A}) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}_i) - 1}{n-1}, && (3.25)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= n - \sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{B}_i \Rightarrow \boldsymbol{A}), && (3.26)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= \sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{B}_i \Rightarrow \neg\boldsymbol{A}) - n + 1, && (3.27)\\
R(\neg\boldsymbol{A}) &= \frac{n - \sum_{i=1}^{n} R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}_i)}{n-1}. && (3.28)
\end{aligned}
$$

Z předchozích vzorců můžeme odvodit tyto vztahy mezi implikacemi:

$$
\begin{aligned}
R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) &= R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}) - R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}), && (3.29)\\
R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) &= R(\boldsymbol{B}) + 1 - R(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}), && (3.30)\\
R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) &= R(\neg\boldsymbol{A}) + 1 - R(\boldsymbol{A} \Rightarrow \neg\boldsymbol{B}). && (3.31)
\end{aligned}
$$

Pozoruhodný je i vztah:

$$R\left(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}\right) + R\left(\boldsymbol{A} \Rightarrow \neg\boldsymbol{B}\right) + \\ + R\left(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}\right) + R\left(\neg\boldsymbol{A} \Rightarrow \neg\boldsymbol{B}\right) = 3. \tag{3.32}$$

Obdobné vztahy platí i pro floppy funkce příslušnosti.

Tabulka 3.1: Předvedení platnosti vztahu 3.22 pro dvouhodnotovou logiku.

$R(\boldsymbol{A_1})$	$R(\boldsymbol{A_2})$	$R(\boldsymbol{A_3})$	$R(\boldsymbol{B})$	$R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A_1})$	$R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A_2})$	$R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A_3})$	$\frac{n-\sum_{i=1}^{n} R(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}_i)}{n-1}$
1	0	0	**1**	1	0	0	**1**
1	0	0	**0**	1	1	1	**0**
0	1	0	**1**	0	1	0	**1**
0	1	0	**0**	1	1	1	**0**
0	0	1	**1**	0	0	1	**1**
0	0	1	**0**	1	1	1	**0**

Příklad 3.2. Ukažme si nyní například, že vztah 3.22 platí ve standardní dvouhodnotové logice pro čtyři množiny $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ a $\boldsymbol{B}$.

Ve čtvrtém a osmém sloupci tabulky 3.1 najdeme ohodnocení výrazů na obou stranách rovnosti pro všechna přípustná ohodnocení $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ a $\boldsymbol{B}$.

Vidíme, že oba sloupce jsou stejné.

3.3 Měření závislosti výroků

Pokud známe floppy funkce příslušnosti $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, nemůžeme odtud ještě spočítat floppy funkce příslušnosti $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$. Lze však odvodit, že floppy funkce příslušnosti $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ je omezena zdola Łukasiewiczovou t-normou a shora Gödelovou t-normou.

T-normy se přitom používají ve fuzzy logice jako náhrada množinového průniku. Nacházíme tak zajímavý vztah mezi floppy logikou a fuzzy logikou.

Podobně floppy funkce příslušnosti $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ je omezena zdola Gödelovou t-konormou a shora Łukasiewiczovou t-konormou. T-konormy se ve fuzzy logice používají jako náhrada množinového sjednocení.

Nerovnici pro průnik můžeme normovat tak, aby normovaný průnik $K_\cap(x)$ byl omezen nulou a jedničkou. Normalizaci ovšem můžeme provést jen v případě, že interval, v němž může floppy funkce příslušnosti průniku ležet, má nenulovou délku. To nastává, pokud ani jedna z funkcí $\boldsymbol{\mu_A}(x)$ a $\boldsymbol{\mu_B}(x)$ nenabývá pro dané x nuly nebo jedničky.

Podobně jako průnik můžeme normovat i nerovnici pro sjednocení nebo i pro ekvivalenci. Získáme tak normované sjednocení $K_\cup(x)$ a normovanou ekvivalenci $K_\Leftrightarrow(x)$.

Mezi normovanými průnikem, sjednocením a ekvivalencí platí následující pozoruhodný vztah:

$$\boxed{K_\cap(x) = K_\Leftrightarrow(x) = 1 - K_\cup(x) = K(x)\,,} \tag{3.33}$$

Koeficient $K(x)$ můžeme vyjádřit například takto:

$$K(x) = \frac{\boldsymbol{\mu_{A\cap B}}(x) - \max\{\boldsymbol{\mu_A}(x) + \boldsymbol{\mu_B}(x) - 1,\ 0\}}{\min\{\boldsymbol{\mu_A}(x)\,,\ \boldsymbol{\mu_B}(x)\} - \max\{\boldsymbol{\mu_A}(x) + \boldsymbol{\mu_B}(x) - 1,\ 0\}}\,. \tag{3.34}$$

Koeficient $K(x)$ můžeme použít jako míru pro určování závislosti výroků. Pokud je závislost při daných $\boldsymbol{\mu_A}(x)$ a $\boldsymbol{\mu_B}(x)$ maximální možná, získáme 1. Pokud je závislost minimální možná, získáme 0.

Zajímavá je otázka, jak je to pro nezávislé jevy, tedy pro floppy množiny, pro které pro dané x platí:

$$\boldsymbol{\mu_{A\cap B}}(x) \quad = \quad \boldsymbol{\mu_A}(x) \cdot \boldsymbol{\mu_B}(x)\,. \tag{3.35}$$

V tomto případě získáme pozoruhodný výsledek:

$$\boxed{K(x) = \boldsymbol{\mu_X}(x)\,,} \tag{3.36}$$

kde $\boldsymbol{X}$ je *přítelem* $\boldsymbol{Y} \in \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}\}$ a

$$\boldsymbol{\mu_Y}(x) = \min\{\boldsymbol{\mu_A}(x)\,,\ \boldsymbol{\mu_B}(x)\,,\ \boldsymbol{\mu_{A'}}(x)\,,\ \boldsymbol{\mu_{B'}}(x)\}\,. \tag{3.37}$$

$\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou přátelé a $\boldsymbol{A'}$ a $\boldsymbol{B'}$ jsou přátelé.

Obdobné vztahy platí i pro pravděpodobnosti.

Kapitola 4

Popis systému pomocí floppy logiky

4.1 Výběr primárních fuzzy množin a jejich funkcí příslušnosti

V této kapitole si ukážeme, jak popsat systém pomocí floppy logiky a jak v takto popsaném systému na základě vstupních veličin odhadovat výstupní veličiny.

Nejprve budeme vybírat vhodné primární fuzzy množiny.

Při výběru vhodných primárních fuzzy množin začneme tím, že se podíváme, jaké vlastnosti se vyskytují v pravidlech systému. Máme-li např. pravidlo: „Jestliže je voda studená, otevři kohout," pak bychom měli pro teplotu vody zavést primární fuzzy množinu „studená".

Dále bychom měli dbát, abychom primárními fuzzy množinami pokryli celý obor možných hodnot. Zavedeme tedy v našem příkladě ještě primární fuzzy množiny „příjemná" a „teplá".

Nakonec si zkontrolujeme, jestli jsou všechny primární fuzzy množiny vzájemně neslučitelné. Pokud nejsou, rozdělíme je tak, aby byly. V našem příkladě jsou například vlastnosti „příjemná" a „teplá" slučitelné, neboť voda může být příjemná i teplá zároveň. Stávající fuzzy množiny tedy rozdělíme tak, abychom slučitelnost vyloučili. Výsledný seznam primárních fuzzy množin pro teplotu vody může vypadat například takto: „nepříjemně studená", „příjemně studená", „příjemná, ale ani studená, ani teplá", „příjemně teplá", „nepříjemně teplá".

V pravidlech systému pak bude vystupovat floppy množina „studená", která bude mít dva prvky: „nepříjemně studená" a „příjemně studená".

Když máme výběr primárních fuzzy množin hotový, vyvstává otázka, jaké těmto množinám přiřadit funkce příslušnosti. Pomoci nám může vzorec:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}}(x) = R(\boldsymbol{B}|x),} \tag{4.1}$$

který říká, že (floppy) funkci příslušnosti můžeme chápat jako podmíněnou pravděpodobnost, že pokud má veličina přesnou hodnotu x, pak má vlastnost $\boldsymbol{B}$.

Často si můžeme představit, že se ptáme většího počtu expertů, kterou z primárních fuzzy množin by přiřadili vodě o teplotě např. 20 °C. Získáme tak pravděpodobnosti primárních fuzzy množin pro tuto teplotu. Získanými body pak můžeme proložit křivky tvaru, který chceme použít.

Vždy musíme dbát na to, aby součet funkcí příslušnosti všech primárních fuzzy množin popisujících nějakou veličinu byl všude roven jedné.

4.2 Fuzzifikace

Nyní jsme v situaci, kdy máme vstupní i výstupní veličiny popsané primárními fuzzy množinami a tyto fuzzy množiny mají přiřazené funkce příslušnosti. Dále předpokládejme, že pro vstupní i výstupní veličiny známe rozdělení pravděpodobnosti.

Nyní bychom na základě vstupních veličin rádi odhadli veličiny výstupní. Konkrétně na základě pravděpodobností vstupních floppy množin budeme odhadovat pravděpodobnosti výstupních floppy množin.

Nejprve však musíme odhadnout pravděpodobnosti vstupních floppy množin. Tomuto procesu budeme říkat fuzzifikace. Při fuzzifikaci mohou nastat různé situace podle toho, co všechno známe. Pro tyto různé situace můžeme odvodit následující vzorce:

- Známe přesnou hodnotu x_0:

$$R(\boldsymbol{B}|x_0) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}}(x_0). \tag{4.2}$$

- Známe rozdělení pravděpodobnosti x:

$$R(\boldsymbol{B}) = \int_X \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}}(x)\,\mathrm{d}P. \tag{4.3}$$

  Integrál je Lebesgueův integrál.

- Známe přesnou hodnotu x_0 a víme, že veličina má vlastnost $\boldsymbol{C}$:

$$R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C}, x_0) = \frac{R(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|x_0)}{R(\boldsymbol{C}|x_0)} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}}(x_0)}{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{C}}(x_0)}. \tag{4.4}$$

- Známe rozdělení pravděpodobnosti x a víme, že veličina má vlastnost $\boldsymbol{C}$:

$$R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C}) = \frac{R(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})}{R(\boldsymbol{C})} = \frac{\int_X \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}}(x)\,\mathrm{d}P}{\int_X \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{C}}(x)\,\mathrm{d}P}. \tag{4.5}$$

  Integrály jsou Lebesgueovy integrály.

- Známe hustotu pravděpodobnosti a víme, že x leží v intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$R(\boldsymbol{B}|\langle a,b\rangle) = \frac{R(\boldsymbol{B} \cap \langle a,b\rangle)}{R(\langle a,b\rangle)} = \frac{\int_a^b \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}}(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{4.6}$$

- Známe hustotu pravděpodobnosti x, víme, že x leží v intervalu $\langle a, b\rangle$ a víme, že veličina má vlastnost $\boldsymbol{C}$:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C},\langle a,b\rangle) &= \frac{R(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|\langle a,b\rangle)}{R(\boldsymbol{C}|\langle a,b\rangle)} = \\ &= \frac{\int_a^b \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}}(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{C}}(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3 Pravidla systému

Nyní si vysvětlíme, jak z pravděpodobností vstupních floppy množin získáme pravděpodobnosti výstupních floppy množin.

Ve floppy logice se nemusíme omezovat na pravidla typu: „Jestliže něco, pak něco.“ Můžeme používat podmíněné pravděpodobnosti: „Jestliže něco, pak na 30 % něco a na 70 % něco jiného.“

Vztah mezi pravděpodobnostmi vstupních floppy množin a pravděpodobnostmi výstupních floppy množin udává následující vzorec:

$$\boxed{R^P(\boldsymbol{B_i}) = \sum_j R(\boldsymbol{B_i}|\boldsymbol{A_j})\cdot R(\boldsymbol{A_j})\,,} \tag{4.8}$$

kde $R(\boldsymbol{B_i}|\boldsymbol{A_j})$ je matice podmíněných pravděpodobností získaných z pravidel systému.

Můžeme si všimnout, že k pravděpodobnostem výstupních veličin jsme přidali horní index P. Tento index signalizuje, že se jedná o pravděpodobnost aposteriorní, kterou počítáme na základě znalostí vstupních veličin. Jinak bychom mohli počítat i pravděpodobnost apriorní, pouze na základě rozdělení pravděpodobnosti výstupních veličin a bez znalosti veličin vstupních.

4.4 Defuzzifikace

Nyní již známe pravděpodobnosti jednotlivých výstupních floppy množin. Již toto nám umožňuje formulovat závěry. Např.: „Na 62 % bude pršet.“ Nebo: „Nejspíš bude pršet.“

Často bychom však chtěli znát aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti výstupních veličin. Ta spočteme pro diskrétní případ takto:

$$\begin{aligned} R^P(x_i) &= \sum_j R\left(x_i|\boldsymbol{B_j}\right) \cdot R^P(\boldsymbol{B_j}) = \\ &= \sum_j \frac{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B_j}}\left(x_i\right) \cdot P\left(x_i\right)}{\sum_{x_i \in X} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B_j}}\left(x_i\right) \cdot P\left(x_i\right)} \cdot R^P(\boldsymbol{B_j}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

a pro spojitý případ takto:

$$\begin{aligned} f^P(x) &= \sum_j f\left(x|\boldsymbol{B_j}\right) \cdot R^P(\boldsymbol{B_j}) = \\ &= \sum_j \frac{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B_j}}\left(x\right) \cdot f\left(x\right)}{\int_{x \in X} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{B_j}}\left(x\right) \cdot f\left(x\right) \mathrm{d}x} \cdot R^P(\boldsymbol{B_j}) \,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

S aposteriorními rozděleními můžeme pracovat obvyklým způsobem. Můžeme např. dělat bodové nebo intervalové odhady.

Příklad 4.1. Máme jednoduchý systém, který na základě teploty vzduchu odhaduje teplotu vody na koupání v nedalekém rybníce.

Teplotu vzduchu popisujeme třemi (neslučitelnými) floppy množinami: „nepřílemně zima“, „příjemně“, „nepříjemně horko“. Právě je 29 °C. 60 % lidí vnímá tuto teplotu jako příjemnou, 40 % jako nepříjemné horko.

Mezi teplotou vzduchu a teplotou vody platí tato pravidla:

1. Jestliže je nepříjemně zima, bude voda na 90 % nepříjemně studená a na 10 % příjemně teplá.
2. Jestliže je příjemně, bude voda na 40 % nepříjemně studená a na 60 % příjemně teplá.
3. Jestliže je nepříjemně horko, bude voda na 10 % nepříjemně studená a na 90 % příjemně teplá.

Teplotu vody popisujeme dvěma neslučitelnými floppy množinami „nepříjemně studená“ a „příjemně teplá“. Průběh jejich floppy funkcí příslušnosti, ani rozdělení pravděpodobnosti teploty vody neznáme. Známe jen střední teplotu vody pro nepříjemně studenou vodu (17 °C) a pro příjemně teplou vodu (24 °C).

Odhadněte, zda bude voda příjemně teplá. Odhadněte střední hodnotu teploty vody.

Nejprve určíme pravděpodobnosti vstupních floppy množin, zapíšeme pravidla systému do matice a spočteme pravděpodobnosti výstupních floppy množin:

$$R^P(\boldsymbol{B_i}) = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}72 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Nyní odhadneme teplotu vody:

$$\mathrm{E}\,(t) = 17 \cdot 0{,}28 + 24 \cdot 0{,}72 = 22{,}04. \tag{4.12}$$

Voda bude na 72 % příjemně teplá. Střední hodnotu teploty vody odhadujeme na 22,04 °C.

Kapitola 5

Porovnání s některými dalšími teoriemi

5.1 Floppy logika, teorie pravděpodobnosti a dvouhodnotová logika

Snad největším překvapením floppy logiky je skutečnost, jak přesně koresponduje s Kolmogorovou teorií pravděpodobnosti [9] a Boolovou dvojhodnotovou logikou [4]. Nemůžeme se ubránit pocitu do sebe zapadajících kousků puzzle.

Vztah floppy logiky s oběma teoriemi je jednoduchý: Floppy logika, ať základní či zobecněná, je modelem Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti. Dále je floppy logika zobecněním Boolovy dvouhodnotové logiky, neboť každé dva výroky, které jsou ekvivalentní v Boolově logice, jsou ekvivalentní i ve floppy logice.

Mezi floppy logikou a Kolmogorovou teorií však můžeme postřehnout jednu nesourodost. Zatímco v Kolmogorově teorii je základním pojmem pravděpodobnost a podmíněná pravděpodobnost je z ní odvozena, ve floppy logice je tomu obráceně.

Mohlo by tedy být zajímavé porovnat floppy logiku s alternativními teoriemi pravděpodobnosti, kde je také výchozím pojmem podmíněná pravděpodobnost [15, 21].

5.2 Floppy logika a fuzzy logika

Floppy logika a fuzzy logika k sobě mají myšlenkově velmi blízko. Obě používají fuzzy množiny a jejich funkce příslušnosti.

Hlavní rozdíl tkví v tom, že zatímco floppy logika používá standardní množinové operace - průnik, sjednocení a doplněk, fuzzy logika je nahrazuje nějakými jinými operacemi. Těchto možných operací je mnoho, vzniká tak velké množství dílčích fuzzy logik.

Časem se prosadila myšlenka, že množinový průnik a sjednocení můžeme nahradit libovolnou (spojitou) t-normou a t-konormou. Poprvé tuto myšlenku nalezneme v [6].

Mezi nejpoužívanější t-normy a t-konormy patří t-norma a t-konorma Gödelova, součinová, Łukasiewiczova a drastická.

Pozoruhodné je, že existuje vztah mezi těmito t-normami a t-konormami a floppy funkcemi příslušnosti. Floppy funkce příslušnosti průniku (resp. sjednocení) je z obou stran omezena Gödelovou a Łukasiewiczovou t-normou (resp. t-konormou).

Podobná situace je i s logickou implikací. Zatímco ve floppy logice je implikace jednoznačně dána, ve fuzzy logice se používají tři různé metody, jak implikaci definovat [3, 14]. To, ve spojení s různými t-normami, t-konormami a negacemi, které lze použít, dává celou řadu možných fuzzy implikací. Mezi nejznámější implikace patří Łukasiewiczova, Kleeneova - Dienesova, Reichenbachova, Gödelova nebo Goguenova.

5.3 Floppy logika a Adamsova a Stalnakerova pravděpodobnostní logika

Jednou z nejdůležitějších myšlenek Adamsových [1, 2] a Stalnakerových [22] prací o pravděpodobnostní logice je tzv. Adamsova teze, která klade rovnost mezi pravděpodobností implikace a podmíněnou pravděpodobností:

$$P\left(A \Rightarrow B\right) = P\left(B|A\right), \qquad \text{jestliže } P\left(A\right) > 0. \tag{5.1}$$

Adams ještě připojuje:

$$P\left(A \Rightarrow B\right) = 1, \qquad \text{jestliže } P\left(A\right) = 0. \tag{5.2}$$

Z této myšlenky lze odvodit celou logiku.

Asi nezávažnější námitku proti logice založené na Adamsově tezi vznesl David Lewis [10], který ukázal, že tato logika selhává, pokud argumentem nějaké implikace je nějaká jiná implikace.

Ve floppy logice je vztah mezi pravděpodobností implikace a podmíněnou pravděpodobností trochu složitější:

$$\boxed{R\left(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}\right) = 1 - R\left(\boldsymbol{A}\right) + R\left(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\right) \cdot R\left(\boldsymbol{A}\right).} \tag{5.3}$$

Výhodou však je, že floppy logika zachovává všechna tvrzení o implikaci, která lze vyjádřit jako ekvivalenci. Můžeme tedy např. používat obměnu implikace:

$$R\,(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) = R\,(\neg\boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\boldsymbol{A})\,, \tag{5.4}$$

distributivitu:

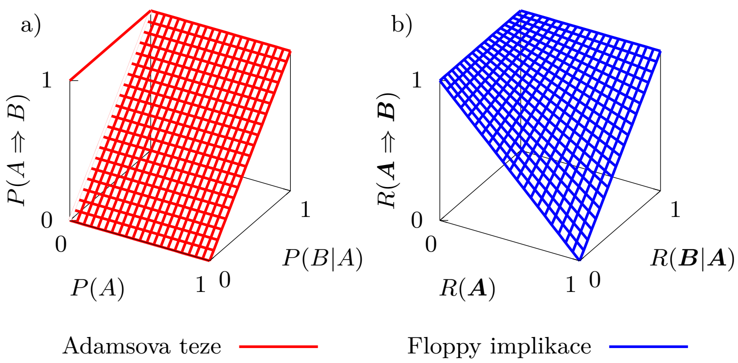
$$R\left[\Big[\boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C})\Big] \Rightarrow \Big[(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Rightarrow (\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C})\Big]\right] = 1 \tag{5.5}$$

nebo tranzitivitu implikace:

$$R\left[\Big[(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C})\Big] \Rightarrow \Big[\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}\Big]\right] = 1. \tag{5.6}$$

Poslední dva příklady demonstrují, že na floppy logiku se Lewisovy výsledky nevztahují.

Porovnání Adamsovy teze a floppy implikace ukazuje obrázek 5.1.



Obrázek 5.1: Porovnání mezi Adamsovou tezí a) a floppy implikací b).

Závěr

Hlavním cílem tohoto textu je seznámit čtenáře s floppy logikou, což je nová mnohahodnotová logika.

Floppy logika je nefunkcionální logika podobná fuzzy logice. Pracuje s floppy množinami, což jsou ostré množiny fuzzy množin.

V dizertační práci [19] byly dokázány tři důležité teorémy. První dva tvrdí, že floppy logika je modelem Kolmogorovy teorie pravděpodobnosti. Můžeme tedy ve floppy logice používat všechny standardní pojmy a nástroje teorie pravděpodobnosti. Tento princip byl demonstrován na definici střední hodnoty floppy množiny. Často jsme také používali definici podmíněné pravděpodobnosti, Bayesovu větu a větu o úplné pravděpodobnosti.

Třetí teorém spojuje floppy logiku s Boolovou logikou. Tvrdí, že každé dva výroky, které jsou ekvivalentní v Boolově dvouhodnotové logice, jsou ekvivalentní také ve floppy logice. To znamená, že floppy logika zachovává všechny vlastnosti dvouhodnotové logiky, které lze vyjádřit jako ekvivalenci. Zachovává tedy např. distributivitu, idempotenci, zákon kontradikce, zákon o vyloučení třetího nebo třeba obměnu implikace. Z tohoto důvodu se domnívám, že floppy logiku můžeme považovat za zobecnění standardní dvouhodnotové logiky.

Floppy logika také spojuje dva myšlenkové proudy, které zobecňují pravdivostní hodnotu různým způsobem. Je to jednak pravděpodobnostní logika, která pravdivostní hodnotu zobecňuje pravděpodobností, jednak fuzzy logika, která pravdivostní hodnotu zobecňuje pomocí funkce příslušnosti. Je pozoruhodné, že oba tyto koncepty nacházejí v rámci floppy logiky své místo.

Další zajímavé výsledky se týkají střední hodnoty floppy množin, floppy implikace a měření závislosti výroků.

Kromě teoretických výsledků se text zaměřuje na praktické aspekty floppy logiky. Detailně rozebíráme práci se systémem. Začínáme volbou vhodných primárních fuzzy množin a pokračujeme přes fuzzifikaci, aplikování pravidel systému až po defuzzifikaci.

Tento text je zatím (říjen 2021) nejucelnějším přehledem floppy logiky v češtině. Pokusili jsme se demonstrovat, že floppy logika je relativně jednoduchá, intuitivní, praktická a elegantní teorie. K jejímu rozvoji se nabízí jak množství teoretických směrů, tak i množství možných aplikací. Srdečně čtenáře povzbuzuji, aby se do dalšího rozvoje floppy logiky zapojil.

Použitá literatura

[1] ADAMS E.W. *A primer of probability logic*. Stanford, Calif.: Center for the Study of Language a Information, 1998. ISBN 157586066X.

[2] ADAMS E.W. *The logic of conditionals: An application of probability to deductive logic*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1975. ISBN 9789048183432.

[3] BACZYŃSKI M., JAYARAM B. (S, N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. *Fuzzy Sets and Systems*. 2008, 159(14), s. 1836 –1859. ISSN 0165-0114.

[4] BOOLE G. *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. London: Walton a Maberly, 1854.

[5] DUBOIS D., PRADE H. Possibility Theory. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. 2001-08-21, doi: `10.1002/047134608X.W3502`.

[6] DUBOIS D., PRADE H.M. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. New York: Academic Press, 1980. ISBN 01-222-2750-6.

[7] GAINES B.R. Fuzzy and probability uncertainty logics. *Information and Control*. 1978, vol. 38(issue 2), s. 154–169, doi: `10.1016/S0019-9958(78)90165-1`. ISSN 00199958.

[8] GERLA G. Inferences in probability logic. *Artificial Intelligence*. 1994, 70(1-2), s. 33–52, doi: `10.1016/0004-3702(94)90102-3`. ISSN 00043702.

[9] KOLMOGOROV A.N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Foundations of the Theory of Probability)*. Berlin: J. Springer, 1933.

[10] LEWIS D. Probabilities of conditionals and conditional probabilities. In: W.L. HARPER, R. STALNAKER, G. PEARCE, ed. *Ifs*. Dordrecht: Springer, 1976, s. 129–147. ISBN 978-94-009-9117-0.

[11] ŁUKASIEWICZ J. Geneza logiki trójwartościowej (The genesis of three-valued logic). *Nauka Polska*. 1939, 24, s. 215–223.

[12] ŁUKASIEWICZ J. O logice trójwartościowej (On three-valued logic). *Ruch Filozoficzny*. 1920, 6, s. 170–171.

[13] MONTES I., HERNÁNDEZ J., MARTINETTI D., MONTES S. Characterization of continuous t-norms compatible with Zadeh's probability of fuzzy events. *Fuzzy Sets and Systems*. 2013, vol. 228(October, 2013), s. 29–43, doi: 10.1016/j.fss.2012.11.020. ISSN 01650114.

[14] NAVARA M., OLŠÁK P. *Základy fuzzy množin (Basics of Fuzzy Sets)*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02585-3.

[15] POPPER K. *The logic of scientific discovery*. New York: Basic Books, 1959.

[16] PROVINSKÝ P. Floppy Logic - a Younger Sister of Fuzzy Logic. *Neural Network World*. 2017, vol. 27(issue 5), s. 479–497, doi: 10.14311/NNW.2017.27.025. ISSN 2336-4335.

[17] PROVINSKÝ P. Floppy Logic - Instructions for Use. *Neural Network World*. 2018, 28(5), s. 473–494, doi: 10.14311/NNW.2018.28.026. ISSN 2336-4335.

[18] PROVINSKÝ P. Floppy logic as a generalization of standard Boolean logic. *Neural Network World*. 2020, 30(3), s. 193–209, doi: 10.14311/NNW.2020.30.014. ISSN 2336-4335.

[19] PROVINSKÝ P. *Fuzzy Sets in Stochastic Modelling*. Praha, 2021. Dis. pr., FD ČVUT. **urlalso**: http://hdl.handle.net/10467/99090.

[20] RAMSEY F.P. Truth and Probability. In: R. BRAITHWAITE, ed. *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. London: Routledge a Kegan Paul, 1931, s. 156–198.

[21] RÉNYI A. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 1955, vol. 6(3-4), s. 285–335, doi: 10.1007/BF02024393. ISSN 0001-5954.

[22] STALNAKER R.C. Probability and conditionals. *Philosophy of science*. 1970, 37(1), s. 64–80, doi: 10.1086/288280. ISSN 00318248.

[23] TUCKER H.G. *A graduate course in probability*. New York: Academic Press, 1967.

[24] ZADEH L.A. Fuzzy probabilities. *Information Processing*. 1984, vol. 20(issue 3), s. 363–372, doi: 10.1016/0306-4573(84)90067-0. ISSN 03064573.

[25] ZADEH L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965, 8(3), s. 338–353, doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X. ISSN 00199958.

[26] ZADEH L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978, vol. 1(issue 1), s. 3–28, doi: 10.1016/0165-0114(78)90029-5. ISSN 01650114.

[27] ZADEH L.A. Probability Measures of Fuzzy Events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968, 23(2), s. 421–427, doi: 10.1016/0022-247X(68)90078-4. ISSN 0022247x.